磁鏈守恆原理的應用

/電路學講義/王耀諄 撰 Dec.8, 2015

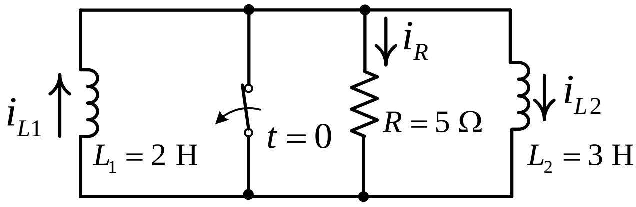

Fig. 1

Fig. 1 所示之電路，在開關開啟前，L_1 有一初時電流 $i_{L1}(0^-)=I_0=5$ A. L_2 之初時電流為零。開關於 t=0 時開啟，試計算(a) L_1 與 L_2 之電流終值；(b) $i_R(t)$, t>0；(c)開關開啟前後，電感的儲能及能量損失；(d)電阻所消耗的總能量。

(a) 開關開啟前，系統的總磁鏈為 $\lambda_0 = L_1 I_0 = 2\times 5 = 10$ V-s (伏特−秒)
開關開啟後，**總磁鏈數守恆**，故必須滿足下式

$$L_1 i_{L1} + L_2 i_{L2} = L_1 I_0 \tag{1}$$

到達穩態時，電阻的電流必衰減至零，此時兩電感的電流必相等，故

$$i_{L1} = i_{L2} \tag{2}$$

由(1)與(2)式可解得，$t\to\infty$時，電感電流之值為

$$i_{L1} = i_{L2} = \frac{L_1 I_0}{L_1 + L_2} = 2\ \text{A}$$

(b) 開關剛開啟時，L_2 之電流為零，故 L_1 之初時電流 I_0 必全部流經電阻，因此 i_R 之初時條件為 $i_R(0^+)=I_0=5$ A。當 $t\to\infty$時，i_R 之終值必為零。當開關開啟後，從電阻看到的電路為 L_1 與 L_2 之並聯電路，等效電感值

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} = \frac{6}{5}\ \text{H} \tag{3}$$

該電路為一階電路，$i_R(t)$必能寫成

$$i_R(t) = A + B\cdot\exp(-\frac{R}{L_{eq}}t),\ t>0 \tag{4}$$

常數 A 與 B 可由 i_R 的初值及終值決定，A=0，B= I_0。故 $i_R(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L_{eq}}t}$, t>0。

(c) 開關開啟前，系統之儲能 $W_0=\frac{1}{2}L_1I_0^2=25\text{ J}$

開關開啟後，系統之儲能 $W_1=\frac{1}{2}L_1i_{L1}^2+\frac{1}{2}L_2i_{L2}^2=10\text{ J}$

能量損失，$\Delta W=W_0-W_1=15\text{ J}$ (5)

(d) 電阻所消耗之能量

$$W_R=\int_0^\infty i_R^2R\cdot dt=\int_0^\infty I_0^2e^{-\frac{2R}{L_{eq}}t}R\cdot dt=-\frac{I_0^2R}{\frac{2R}{L_{eq}}}e^{-\frac{2R}{L_{eq}}t}\Bigg|_0^\infty=\frac{I_0^2L_{eq}}{2}=15\text{ J} \tag{6}$$

電阻所消耗的能量恰等於系統損失的能量，符合「能量守恆」原理。

最後，我們從(6)式可發現，W_R 與電阻 R 無關 (但是 $R\neq 0$，因為 R=0 時，開關就失去功能了。)，表示電阻的大小並不影響能量損失之值，這個論點也可由(5)式覷得，因為 ΔW 的計算自始至終都未用到電阻值 R，ΔW 只與系統的初時及終時狀態有關。我們可以進一步推論，即使將電阻移除 (即假設 $R\to\infty$)，能量損失 ΔW 仍為 15 J。在電路沒有電阻的情形下，是什麼原理讓能量憑空消失呢？此一問題值得大家深入探討。

附註：磁鏈(magnetic flux linkage)，或稱為磁交鏈，其單位可以用伏特-秒(Volt-second)，也可以用韋伯-匝(Weber-turn)。與磁鏈守恆原理相對應的，就是電荷守恆原理。一般學生對「電荷守恆」原理比較熟悉，但對「磁鏈守恆」就比較陌生，對磁鏈的定義、單位、應用等，都必須多思考與練習才能得心應手。