狀態變數法與矩陣「特徵值」之應用

電路學第 7 章補充教材

王耀諄 撰， 2015 年 12 月改寫

0. 前言

在課本第 7 章中，我們解特性方程式(characteristic equation)來決定二階電路暫態響應的自然頻率 (此處之頻率係指「廣義頻率」而言)，解出自然響應頻率 s_1 及 s_2 之後，電路的全響應就呼之欲出。以電流響應為例，可以假設電流之全解為 $i(t)=A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}+i_f$ ，i_f 為其穩態響應，A_1 及 A_2 必須利用初時條件決定之。

此處我們要補充的，是另外兩種計算自然響應頻率 s_1 及 s_2 的方法，即「狀態變數法」及「網路函數法」。網路函數法是個快速便捷的工具，「狀態變數法」不論解題的速度或便利性都不如網路函數法，但是它卻傳達了許多重要的觀念，包括矩陣運算、矩陣特徵值(Eigenvalue)的物理意義、系統動態…等，許多在工程數學或控制系統課程中不易瞭解的觀念，在電路暫態的分析中卻格外的清楚易懂，因此必須在此補充。

1. *R-L-C* 串聯電路的狀態變數解法

Fig. 1 之電路，可寫出以下之方程式：

$$L\frac{di}{dt}+Ri+v=V_0 \tag{1}$$

$$i=C\cdot\frac{dv}{dt} \tag{2}$$

變數 i 及 v 稱為 **狀態變數** (state variables)，我們將 i 及 v 的一次微分項移至左邊，整理後得

$$\frac{di}{dt}=-\frac{R}{L}i-\frac{1}{L}v+\frac{V_0}{L} \tag{3}$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{i}{C} \tag{4}$$

(3)及(4)寫成矩陣形式為

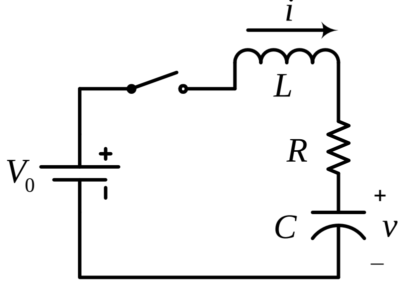

Fig. 1. A series *R-L-C* circuit

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}V_0 \tag{5}$$

(5)式稱為「**狀態方程式**」(state equation)，是利用狀態變數分析電路動態的基本方程式，令方陣 $\boldsymbol{A}$ 為

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$\boldsymbol{A}$ 的特徵值即為暫態響應之自然頻率。$\boldsymbol{A}$ 的特徵值可由(7)式之行列式 $|\boldsymbol{A}-s\boldsymbol{I}|=0$ 求得，$\boldsymbol{I}$ 表示單元矩陣：

$$\begin{vmatrix} -(R/L)-s & -1/L \\ 1/C & -s \end{vmatrix}=0 \tag{7}$$

$$s=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}} \tag{8}$$

此即 RLC 串聯電路的兩個自然頻率。

2. 二階電感電路

我們再舉 **Fig. 2** 中的二階電路為例，這個電路含有兩個電感器，因此是二階電路，沿著 *a-b-c-d* 迴路可寫出 KVL 方程式為

$$(i_1+i_2)\times 1+\frac{di_1}{dt}=5 \tag{9}$$

沿著 *a-b-e-f-c-d* 迴路可寫出 KVL 方程式為

$$i_1+2i_2+\frac{di_2}{dt}=5 \tag{10}$$

注意此處 i_1 及 i_2 為**狀態變數**，將一次微分項移至等號左邊，可得**狀態方程式**，以矩陣形式表示為：

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot 5 \tag{11}$$

特性矩陣 $\boldsymbol{A}$ 為

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \tag{12}$$

解 $|\boldsymbol{A}-s\boldsymbol{I}|=0$ 可得 $\boldsymbol{A}$ 之特徵值為 $s=\left(-3\pm\sqrt{5}\right)/2$ 。

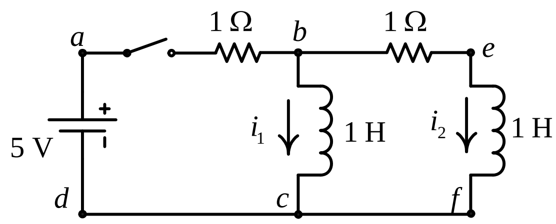

Fig. 2. Two-mesh circuit

3. 另一個二階電路的例子

Fig. 3 中，我們仍選擇電感電流 i 及電容電壓 v 為狀態變數，列出網目方程式如下

$$i+\frac{1}{4}\frac{dv}{dt}+\frac{1}{4}\frac{di}{dt}=V_0 \tag{13}$$

$$-\frac{1}{4}\frac{di}{dt}+\frac{1}{4}\frac{dv}{dt}+v=0 \tag{14}$$

由(13) ± (14)，可得狀態方程式如下：

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}\cdot V_0 \tag{15}$$

特徵值為 $s=-2\pm j2$，故知其暫態響應必含有 $s=-2\pm j2$ 之頻率。

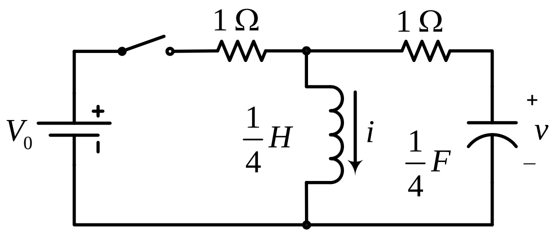

Fig. 3. Two-mesh 2nd-order circuit

4. 網路函數法

網路函數(network function)表示電路中兩種響應的**比值**寫成**廣義頻率** s 的函數。在電路學中最常用的兩個比值就是廣義導納 Y(s)及廣義阻抗 Z(s)，以下我們略去「廣義」二字。Y(s)即電流對電壓的比值，Z(s)即電壓對電流的比值。當激勵源是電壓而我們要求的響應是電流時，電流就等於電壓乘以激勵源看入電路的導納 Y(s)，因此 Y(s)的**極點***(poles) 必為自然響應之頻率 (why? 上課有講喔)。另一種情況，如果想求的響應是電壓，而激勵源是電流源，那麼響應就等於電流乘以電流源看入電路的阻抗 Z(s)，Z(s)的極點必為電壓響應的自然頻率。電路的 Y(s)或 Z(s)的求法很簡單，電阻不變，電容變為 $1/(sC)$，電感變為 sL，就能算出所需的 Y(s)或 Z(s)。

在求解電路自然頻率的三種方法 (*i.e.*, 高階(二階以上)微分方程式法、狀態變數法及網路函數法) 之中，以網路函數法最為便捷，最適用於電路的解析，而且能延伸為「拉普拉斯變換」的解法，但電路數值模擬的標準方法仍為狀態變數法，故此二者均極重要，不可偏廢。

---

* 極點就是使網路函數為無窮大的 s 值，也就是令網路函數的分母為零，所求出的廣義頻率。

以 **Fig. 1** 之電路為例，電壓源 V_0 所看入電路之導納 Y(s)為

$$Y(s)=\frac{s/L}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}} \tag{16}$$

其極點為 $s=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$，與(8)式之結果一致。再以 **Fig. 2** 之電路為例， 從 5*V* 電壓源看入電路之導納 Y(s)為$\{1+[(1+s)//s]\}^{-1}$，即

$$Y(s)=\frac{2s+1}{s^2+3s+1} \tag{17}$$

其極點即為 $s=\left(-3\pm\sqrt{5}\right)/2$。

再以 **Fig. 3** 之電路為例，從 V_0 看入電路之導納 Y(s)為

$$Y(s)=\frac{1}{1+\left(\left(1+\frac{4}{s}\right)//\frac{s}{4}\right)}=\frac{s^2+4s+16}{2s^2+8s+16} \tag{18}$$

Y(s)的極點為 $s=-2\pm j2$，和特徵值法的結果一致。

我們再以 **Fig.4** 之電路為例，此電路之激勵為電流源，從電流源看入電路的**阻抗**

$$Z(s)=(6+s)//\frac{5}{s}=\frac{5s+30}{s^2+6s+5} \tag{19}$$

Z(*s*)的極點是 $s=-1,-5$，此一結果在第 6 節的練習題(1)中可與解答對照。

最後，參考 **Fig. 5** 的**三階電路**，從電路右方的電流源看入電路的**阻抗**為

$$\begin{aligned} Z(s)&=\frac{6}{5s}//\left(\frac{3s}{10}+\frac{12/s}{1+12/s}\right)=\frac{6}{5}\cdot\frac{s^2+12s+40}{s^3+12s^2+44s+48} \\ &=\frac{6}{5}\cdot\frac{s^2+12s+40}{(s+2)(s+4)(s+6)} \end{aligned} \tag{20}$$

Z(*s*)的極點為 $s=-2,-4,-6$，此即該電路的自然頻率，第 6 節練習題(3)的解答可與之對照。

5. 結論

狀態變數法是求解電路暫態的方法之一，它除了能迅速求出電路的自然響應頻率，也是利用電腦模擬電路動態的基本方法。通常我們選擇 **獨立電感的電流及獨立電容的電壓** 作為狀態變數，因此狀態變數的個數就等於電路的階數，利用 KCL 或 KVL 就可以很快的寫出狀態變數的一階微分方程式，然後化簡成狀態

方程式的標準形式，特性矩陣的特徵值就是該電路的自然頻率。

狀態變數的分析在未來「控制系統」的課程中會有更深入的討論，不過藉由電路的實例分析，相信將來同學們在學習狀態變數、特徵值等相關主題時，都能更容易掌握其物理意義及實際應用。

6. 練習

(1) **Fig. 4** 中之電路，若電容 C=1/5 F，用狀態變數法求出 t>0 時 $v(t)$之全響應。[Solution: $v(t) = 24 - 25e^{-t} + e^{-5t}$ V]

(2) 若 **Fig. 4** 中 C=1/10 F，重新求出 $v(t)$之全響應。[Solution: $v(t) = e^{-3t}(-24\cos t - 32\sin t) + 24$ V]

(3) **Fig. 5** 是一個三階電路，若初時條件皆為零，用狀態變數法求 $v_1(t)$、$v_2(t)$ 及 $i(t)$之全響應。

[Solution: $v_1(t) = -15e^{-2t} + 6e^{-4t} - e^{-6t} + 10$ V ,
$v_2(t) = -30e^{-2t} + 30e^{-4t} - 10e^{-6t} + 10$ V,
$i(t) = 25e^{-2t} - 20e^{-4t} + 5e^{-6t} - 10$ A]

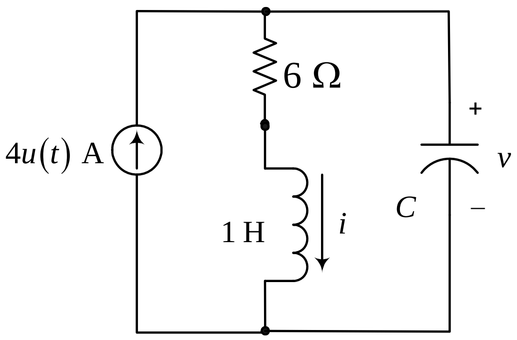

Fig. 4. Exercise using the state-variable method

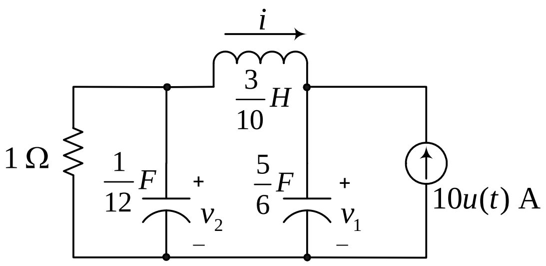

Fig. 5. A 3rd-order circuit

補充：比例變換 (scaling)

1. 前言

比例變換 (scaling) 包括大小(幅度)及頻率兩種變換，以及兩者同時進行的變換，除了課本的內容，此處我們特別針對含有相依電源的電路加以補充。

2. 比例變換的種類

2.1 幅度變換 (magnitude scaling)：使雙端網路的阻抗都成為原來的 k_m 倍。k_m >0。

$R' = k_m R$ ， $L' = k_m L$ ， $C' = C / k_m$

注意：帶撇號 (apostrophe) 之符號為變換後之數值。

2.2 頻率變換 (frequency scaling)：使雙端網路中任何阻抗的頻率都成為原來的 k_f 倍。k_f >0。

$R' = R$ ， $L' = L / k_f$ ， $C' = C / k_f$

2.3 幅度與頻率同時變換

$R' = k_m R$ ， $L' = (k_m / k_f) L$ ， $C' = C / (k_m k_f)$ ，

$Z'(s) = k_m Z(s / k_f)$

注意：$Z'(s)$ 為 $Z(s)$ 變換後之阻抗函數。

3. 含相依電源之網路

若網路含相依電源時，則視電源的種類而變換：

相依電源種類	表示式	單位	比例變換：幅度變換因子 k_m	比例變換：頻率變換因子 k_f
電壓放大	$v_s = k_1 v_1$	k_1 無單位	k_1 不變	均不變 Invariant
電流放大	$i_s = k_2 i_1$	k_2 無單位	k_2 不變	
轉阻放大	$v_s = k_x i_x$	k_x 之單位為歐姆	$k_x' = k_m k_x$	
轉導放大	$i_s = k_y v_y$	k_y 之單位為西門子	$k_y' = k_y / k_m$	

4. 練習

(1)求 **Fig. 6** 電路之輸入阻抗 $\mathbf{Z}_{in}(s)$；(2)若以幅度變換因子 k_m=20、頻率變換因子 k_f=50 進行比例變換，求變換後的輸入阻抗 $\mathbf{Z}_{in}'(s)$。

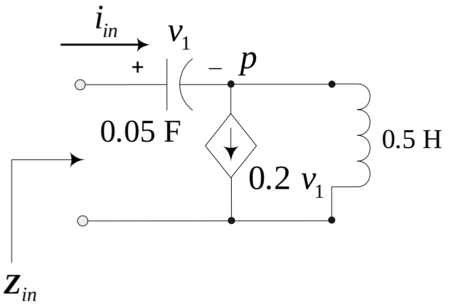

Fig. 6. Magnitude and frequency scaling of a circuit containing a dependent current source

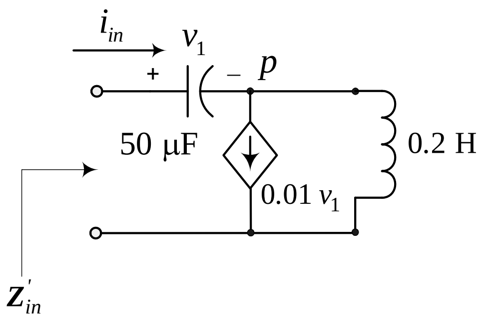

Fig. 7. Circuit after scaling

解法一：

(1) 在輸入端加上一個 1V 之電壓源，寫出 p 點的 KCL 方程式為

$$\frac{1-V_1}{0.5s}+0.2V_1=0.05s\cdot V_1$$

解得 $V_1=\dfrac{1}{0.025s^2-0.1s+1}$，

此時之輸入電流 $I_{in}=0.05s\cdot V_1=\dfrac{0.05s}{0.025s^2-0.1s+1}$

故輸入阻抗 $Z_{in}(s)=\dfrac{1}{I_{in}}=\dfrac{0.5s^2-2s+20}{s}$

(2)利用 $Z'(s)=k_m Z(s/k_f)$ 之關係式，

$$Z'(s)=20\times\frac{0.5\times(s/50)^2-2\times(s/50)+20}{s/50}$$
$$=\frac{0.2s^2-40s+20000}{s}$$

解法二：

(2) 先將電路所有元件依比例變換因子加以計算，變換後之結果如 **Fig. 7** 所示。

$C'=C/(k_m k_f)=0.05/(20\times50)=5\times10^{-5}$F=50μF

$L'=(k_m/k_f)L=0.5\times20/50=0.2H$

$k_x'=k_x/k_m=0.2/20=0.01$ ==>相依電流源為 $0.01v_1$。

寫出 p 點的 KCL 方程式為

$$\frac{1-V_1}{0.2s}+0.01V_1=5\times10^{-5}s\cdot V_1$$

解得 $V_1=\dfrac{1}{10^{-5}s^2-0.002s+1}$，

輸入電流 $I_{in}=5\times10^{-5}s\cdot V_1=\dfrac{5\times10^{-5}s}{10^{-5}s^2-0.002s+1}$

$=\dfrac{s}{0.2s^2-40s+20000}$

故輸入阻抗 $Z_{in}'(s)=\dfrac{1}{I_{in}}=\dfrac{0.2s^2-40s+20000}{s}$